9.

Q. F. F. Q. S.

SPECIMEN GRADUALE

PROBLEMATA

QUÆDAM

ARITHMETICÆ UNIVERSALIS

NEWTONI

PER

ANALYSIN GEOMETRICAM

SOLUTA EXHIBENS,

QUOD,

Consensu Ampliss. Facult. Philosoph. in Regia Academia Aboënsi,

PRÆSIDE

MARTINO JOHANNE WALLENIO,

MATHES. PROFESSORE REG. & ORDIN.

Publicæ censuræ subjicit

EPHRAIM CARENIUS

SATACUNDENSIS.

Die X. Maji Anni MDCCLX.

Loco horisque A. M. Solitis.

ABOÆ, Impressit Direct. & Typogr. Reg. Magn. Duc. Finland. JACOB MERCKELL.

Donum Præsidis veneratur E. Lidius

Wälborna Enke-Fru
OTTILIANA LOVISA TANDEFELDT,
Född GYLLENECKER.

Wärda Fru / E'r dygd at åra /
Jag E'rt namn här rista tör /
Ringa offer E'r frambära /
För den gunst jag daglig' spör.

* * *

Himlen med sin Nåd E'r hägne /
Jorden bäre ymnig frukt /
Wärda Barnen åldren fägne /
Lyckan följe dygd och tukt.

* * *

Helsa / trefnad / lyckans gåfwor /
Tryte aldrig i Ert' bo /
GUD med allsköns sällhets håfwor
Gjör' E'r lefnad full af ro.

Wälborna Fruens

ödmjukaste tjenare
EPHRAIM CARENIUS.

AUCTORI CLARISSIMO
AMICO CARISSIMO.

Matheſin a vaſti quondam ingenii Philoſopho, ſcientiarum, præſertim naturalis, jure magnam ſalutari appendicem, dudum agnovere agnoſcunt & hodie, quotquot rem juſta lance penſitant. Scientiis enim reliquis, hæc vel ideo ſubſidio eſſe judicanda eſt, quod ars demonſtrandi, nulla alia quam hac plenius declarari & ob oculos poni poſſit. Animum in rebus apprehendendis, tam certa ducit via, ut non facile ad falſa declinet. In excolendo ingenio, magna ejus omnino cenſenda eſt efficacia, quum hæc ingenium ita acuat, ut cos ferrum. Unde non ſine cauſſa huic inter ſtudia παρασκευαστικὰ ſuus aſſignari debet locus. Cæterum partes ſuas in hoc rite peragere, arduum magis eſt negotium, quam ut quilibet illi par ſit cenſendus. Quanta namque ingenii judiciique vi, quam indefeſſa diligentia ad hoc opus ſit, facili negotio perſpicitur. Hinc eos, qui nobili huic ſtudio ſuas conſecrarunt vires, & qui virtuti non fucatæ boniſque moribus operam navarunt, felices nec non laude dignos eſſe prædicandos, nemo unquam ſanus dubitavit. Tu amice cariſſime, quid litteris, & in his *matheſi*, impendiſti laboris, & qui in iſta Tui ſint progreſſus, præſens hoc nitidum loquitur Specimen. Maturus sane foetus immaturæ licet ætatis. Laudes Tuas meritas persequi, vetat illa quæ nos intercedit amicitia. Hoc enim potius ab alio, quam amico exspectandum. Id tantum dixisse sufficiat, Te in studiis, quæ communia per aliquod tempus exercuimus, indefessum mihi fuisse æmulum. Quapropter lætus plane, præsentem arripui occasionem, quantus in Te, amice, meus sit affectus, publice declarandi. Ast desunt verba, destituit me facundia. Simplex tantum hæc, ex sincero tamen pectore profecta est, quam proferre valeo acclamatio. Perge Amice merita addere meritis; difficultates quæ sese offerunt, vincere perge. Macte Tuo studio: solita virtute macte: Sic tandem DEum Te amplissimis virtutum & eruditionis præmiis condecoraturum, probi omnes, inprimis vero quotquot Tibi sunt cognati & amici, lætabuntur.

Sic currenti calamo
apposuit
LAUR. ECKMAN.

D. D.

UT incrementa Geometriæ plurimum promovit Analysis recentiorum, sic ad conservandum illi nitorem suum ac simplicem puritatem, veterum sequi in ea tractanda morem vel maxime interest. Ad hæc, quemadmodum hos mathemata synthetice proposuisse constat, ad inveniendas autem veritates, easq; arduas etiam valde & abstrusas, Analysi quadam Geometrica usos esse, quæ etiamnum supersunt specimina, haud obscure testantur; ita utramq; hanc eorum methodum arctiori adhuc vinculo conjungi, e re esse cum discentium tum scientiæ ipsius, inficiabitur facile nemo. Scilicet generatim quidem methodus Analytica in inveniendo præcipuum exserit usum; speciatim autem, quæ per ratiocinia mere Geometrica procedit, vel eo nomine est commendanda, quod elegantia & in construendo & in demonstrando ejus ope inprimis obtineatur. Ex adverso, quemadmodum Analysis recentiorum minus concinnas suppeditat constructiones Geometricas, licet enim tales subinde dentur ab Analystis recentioribus - - - , eæ tamen non immediate ex æquatione Problematis constitutiva, sed aliunde potius desumuntur*; *ita multo minus commoda & perspicua demonstrationes syntheticæ ab Algebra sunt exspectandæ. Has ob caussas & quia præterea res ad quamlibet disciplinam pertinentes, ex solis, quoad fieri potest, principiis propriis ac domesticis tradere convenit, digna mihi res visa est Analysi Geometricæ operam dare, atque alterum edit ro specimen Academicum, illam ad solvenda aliquot problemata adhibere, ejusmodi quidem, quæ Algebræ ope alibi soluta reperiuntur, quo utriusq; generis solutionum ratio & discrimen adpareat melius, eademq; ex Illustr. NEWTONI Arithmetica Universali (p. m. 96. seqq.) quippe quæ libri classici auctoritatem dudum obtinuit, depromta; quod institutum etiam secutus* *est Auctor dissertationis, anno superiori hic edita, cui titulus:* Analysis Geometrica nonnullorum problematum Arithmeticæ Universalis NEWTONI. *Atq; cum sint aliqua ab ipso NEWTONO, alia ab aliis Geometrice soluta, multa autem vix ac ne vix quidem sine Algebra expediri posse videantur, neq; temporis ratio; singula solicite examinare permiserit; factum inde est, ut non nisi sparsim & interrupto ordine quædam decerpserim, quorum resolutio meditanti se primum obtulit. Denique ut temeritatis culpam aut suspicionem a nobis avertamus, quasi nimirum, suscepta hac opera, celebritati nominis & scriptorum immortalis Viri detractum vellemus, id tantum monuisse sufficiat: Ipsi, in libro & loco citato, propositum fuisse, calculi algebraici in Geometria usum & adplicationem ostendere; quamobrem instituto ejus maxime consentaneum utique erat, algebraicas potius quam alias, etiam si longe elegantiores invenire potuisset, dare solutiones. Tametsi igitur illas, quæ his pagellis sistuntur, solutionibus earundem propositionum algebraicis NEWTONIANIS, ut magis concinnas, præferendas existimemus; immodestiæ tamen nos arguitum haud iri, sed æquum quemlibet censorem favore suo qualecunque hoc, innocuum certe, tentamen dignaturum speramus.*

* Teste etiam LEIBNITIO vid. *Act. Erudit. Lips. A.* 1707. p. 106.

PROBLEMA I.* Fig. 1.

D*Ata rectâ terminata BC, a cujus extremitatibus duæ rectæ* BA CA *ducantur in datis angulis B, C; invenire AD altitudinem concursus A supra datam BC.* Quia facili & notissima constructione, datis basi BC & angulis B, C, exhiberi potest △ ABC, eoque facto perpendiculum *AD* duci; intelligitur non de constructione Geometrica sed solutione Arithmetica

rithmetica quæstionem esse. Jam quia sumtâ AD pro sinu toto, BD & DC sunt tangentes angulorum DAB, DAC, seu cotangentes ipsorum B & C, atque BD $\pm$ DC (prout vel uterque angulorum BC acutus fuerit vel alteruter obtusus) est $=$ BC; mox quidem patet inveniri AD inferendo: ut se habet summa vel differentia cotangentium angulorum datorum B & C ad sinum totum, sic data recta BC ad quæsitam AD. Cum vero hæc regula, quam etiam exhibet formula NEWTONI, quantumvis simplex videatur, calculo minus commoda (†) sit; præstabit de alia cogitare.

Per Elem. Trig. est in Δ ABC, sin. BAC vel B$+$C: sin. B:: BC : CA; & in Δ ADC, sin. tot : sin *C*:: *CA*: AD; per compositionem rationum erit *sin. tot.* $\times$ *sin.* $\overline{B+C}$ *: sin. B* $\times$ *sin. C:: BC: AD.* Ex. gr. sit BC $=$ 1597 ped., ang. B $= 33°\ 24'$, C $= 61°\ 45'$, unde B $+$ C $= 95°9'$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Log. } 1597 = 3.\ 2033049 \\ \text{Log. sin B} = 9.\ 7407421 \\ \text{Log. sin. C.} = 9.\ 6449220 \end{array}\right\}\text{add.}$$

$$22.\ 5889690$$

$$\text{L. f. tot.} + \text{l. f. } 95°9' = 10 + \text{l. f. } 84°51',\ 19.\ 9982433 \text{ Subtr.}$$

$$\text{Log. BC } 2.\ 5907257,$$

BC $=$ 389, 7 ped.

SCHOL. Quod si vero, iisdem datis, propositum fuerit invenire segmenta BD, DC, res æque expedite procedet. Facile nimirum ostenditur esse *sin. tot.* $\times$ *sin.* $\overline{B+C}$ *: sin. B* $\times$ *cos. C:: BC: CD*, nec non *sin. tot.* $\times$ *sin.* $\overline{B+C}$*: sin. C* $\times$ *cos. B:: BC: BD.* Paulo tamen adhuc commodius

 id

id efficitur ſequenti ratione, quod, prætermiſſa demonſtratione, haud difficulter invenienda, tantum indicabimus. Inferatur: $\text{ſin.}\overline{C+B}.\text{ſin}\overline{C-B} :: \frac{1}{2}BC : R$, erunt ſegmenta quæſita $= \frac{1}{2}BC \pm R$; vel ſi angulorum datorum unus C fuerit obtuſus, $R \pm \frac{1}{2}BC$.

(*) Numeri propoſitionibus adpoſiti iidem ſunt, ſecundum quos illæ apud NEWTONUM ſemet excipiunt. Tractant autem præſens hoc problema etiam Dn. Baro PALMQUIST *Inledn. til Algebra Del.* 2. §. 26. A. G. DUHRE *Grundade Geometr. p.* 510. WOLF. *Elem. Anal. P. I.* §. 316.

(†) Scilicet quia in tabulis ſinuum & tangentium exactior horum ratio ad ſinum totum magnis numeris exprimitur, abſque logarithmis calculus prolixior & tædioſior evaderet; atqui numerorum quorumlibet majorum, qui prodeunt v. g. additione eorum, quibus tangentes definiuntur, logarithmi, ſaltem in canone minori, non proſtant. Cæterum præter memoratam hanc regulam, aliam, ad præſens problema ſolvendum magis adhuc ineptam, videre licet apud WOLFIUM loc. modo cit.

PROBLEMA III. *

Trianguli rectanguli perimetro & area datis, invenire hypothenuſam. Continetur ſequenti problemate VIII:vo tanquam magis generali.

(*) PALMQUIST loc. cit §. 22. DUHRE l. c. p. 512. G. J. GRAVESANDE Matheſ Univ. Elem. §. 197.

PROBLEMA VIII. (†) *Fig.* 2.

Trianguli cujuscunque ABC, datis area, perimetro & uno angulorum A, cætera determinare.

ANALYSIS. Constructum intelligatur Δ:lum, & circuli, qui in eodem inscribi (*a*) potest, centrum sit O, adeo ut junctæ OA OB OC dividant Δ ABC in tria OAB OAC OBC habentia altitudinem communem OD, radium scilicet istius circuli, positis nimirum basibus singulorum AB AC BC respective, & proinde (*b*) simul sumta æqualia rectangulo contento sub OD & dimidia perimetro; quæ cum detur ut & ipsum hoc rectangulum, æquale videlicet areæ datæ; dabitur *OD*. Datur præterea ang. OAD, dimidius (*a*) scilicet dati A; quare datur Δ:li rectanguli OAD latus *AD*. At quia (*a*) congruunt ΔΔ OAD & OAd, OBD & OBδ, OCd & OCδ, æquales sunt AD & Ad, BD & Bδ, Cd & Cδ, quæ sex rectæ complent perimetrum datam; datur ergo AD + Bδ + δC seu AD + BC = semiperimetro ideoque propter datam (demonstr.) AD, datur basis *BC* Δ:li desiderati, cujus area data cum sit $= \frac{1}{2}$ BC × AM (si ductum concipiatur perpendiculum AM); dabitur *AM*. Datis itaque basi BC, angulo opposito & altitudine Δ:li ABC, ipsum facili negotio construetur. Aut vero: quia ex præmissis adparet esse etiam AC + BD = semiperimetro, quæ datur ut & (dem.) AD; datur *AB* + *AC*. Porro ductâ per mentem BE perpendiculari ad AC, datur, propter angulum BAE datum, ratio AB : BE; quare, cum detur BE × AC = scilicet duplæ areæ, datur *AB* × *AC*. Datis itaque sic summa laterum AB & AC nec non rectangulo sub iisdem, inveniri poterunt ipsa; quo facto Δ:lum, ex datis lateribus AB AC cum angulo comprehenso, denuo determinatur.

SYNTHESIS. Fiat recta *Fc* $=$ dimidio perimetri, & dato angulo $=$ cFG; qui bisecetur rectâ FH. Ipsi Fc & rectæ Q, quæ possit datam aream & proinde vel immediate datur vel saltem (*c*) inveniri potest, sumatur tertia proportionalis *FK* statuenda ipsi Fc ad angulos rectos. Ipsi FH parallela e puncto K ducatur recta Kb occurrens ipsi Fc in b, tumque constituto (*d*) super bc segmento circuli bNc quod capiat angulum $=$ dato seu cFG, capiatur, in FK productâ, FL tertia proportionalis ipsis $\frac{1}{2}$ bc & Q. Agatur per L ipsi Fc parallela La, quæ occurrat circumferentiæ bNc in aliquo puncto *a*. Junctis *ab ac*, dico Δ:lum *abc* satisfacere quæstioni. Nam propter (constr) $\div$ Fc, Q, FK, nec non $\frac{1}{2}$ bc, Q, FL, erit (*e*) Fc $\times$ FK $=$ Q² $=$ ($\frac{1}{2}$ *bc* $\times$ FL seu, ducto ad *bc* perpendiculo *am*), $\frac{1}{2}$ bc $\times$ am, atque (*dem.* in analysi) OD $\times$ Fc $=$ areæ $=$ Q²; unde *FK* $=$ *OD*, & quia præterea in $\Delta\Delta$ KFb ODA est ang. *KbF* $=$ (*f*) (bFH $=$ $\frac{1}{2}$ bFG $=$ $\frac{1}{2}$ A $=$) *OAD*, erit (*g*) Fb $=$ AD ideoque ob Fc $=$ (*dem.* in analysi) AD $+$ BC, *bc* $=$ *BC*. Hinc & quia $\frac{1}{2}$ bc $\times$ am $=$ (dem.) Q² $=$ (*hyp.*) $\frac{1}{2}$ BC $\times$ AM, erit *am* $=$ *AM*. Denique (*Constr. d*) ang. *bac* $=$ *BAC* dato. Ergo $\Delta\Delta$:la *abc* ABC, quippe quorum altitudines, bases hisque oppositi anguli æquales sunt, congruant necesse est. Q. E. D.

Aliter. Posset etiam sequenti fere modo constructio absolvi. Adjiciatur ipsi Fc in directum

Fβ = Fb, & ſuper tota βc tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus. *FG*, cujus poſitio ſupra definita eſt, fiat = Q, & ipſis FG Fc perpendiculares ducantur GN FN concurrentes in N. Tum inter circumferentiam atque diametrum βc dicti ſemicirculi aptetur ad rectos angulos ipſi βc, recta, quæ ſit media proportionalis inter FG & 2FN; erunt ſegmenta ipſius βc, in quæ ab eadem recta dividitur, æqualia ipſis *AB* & *AC*; quibus ſic inventis, & quia datus eſt ang. *BAC*, deſcribetur ipſum △:lum. Demonſtrationem, ex analyſi allata haud difficulter concinnandam, brevitatis ſtudio omitto.

Si, quæ in △:lo ABC cognita ſupponuntur, in numeris dantur; problema calculo hunc in modum ſolvi poteſt: *Quære ſinui toti, cotangenti dimidii anguli dati atque areæ △:li per ſemiperimetrum diviſæ* ~~*tertiam*~~ quartam *proportionalem. Hac demtâ dimidiæ perimetro, relinquitur baſis ſive latus angulo dato oppoſitum; additâ vero, prodit ſumma reliquorum laterum.* (Eſt enim per præmiſſa & princ. Arithm. *FK* = Q^2 ſeu areæ diviſæ per Fc, & porro per El. Trig. *FK*: *Fb* ſeu OD: DA : : *Sin. tot*: tang. ang. AOD i. e. *cotang.* $\frac{1}{2}$ *A*.) Datis itaque baſi cum angulo oppoſito & ſumma crurum, inveniri poſſunt, per regulam a NEWTONO ſub finem *Probl. X:mi* traditam, anguli ad baſin & hinc denique, per vulgata principia Trigon., reliqua latera. Quando ang. A rectus fuerit, qui eſt caſus *Probl. III:tii*, erit, ob ang. OAD ſemirectum, AD = DO ſeu *Fb* (= *FK*) tertia proportionalis ipſis Fc & Q, atque bNc ſemicirculus

circulus

circulus diametro *bc* describendus; regula autem arithmetica generalis modo allata, in hanc specialem abit: *Differentia dimidiæ perimetri △:li rectanguli ab area per eundem semiperimetrum divisa, æqualis est hypothenusæ.*

(†) PALMQU. l. c. §. 27. DUHRE p. 514.

PROPLEMA IX. * Fig. 3.

Datis altitudine, basi AF & summa laterum AC CF, invenire Triangulum AFC. Erectâ ad AB perpendiculari AG = altitudini datæ & ductâ per G ipsi AF parallela interminata GH, manifestum est verticem C △:li quæsiti cadere in GH. Productam puta FC ad E ut sit CE = CA ideoque FE = AC + CF. Cadit itaque punctum E in peripheriam circuli dati, centro scilicet F radio = summæ laterum datæ descripti, & quia circulus centro C per A describendus alterum illum in E tangeret, quæstio jam redit ad inveniendum in recta GH positione data centrum C circuli, qui per datum punctum A transseat & alium datum circulum contingat, intus quidem, quoniam (ob FA < FE *h*) A intra hunc cadit. Est vero hic casus admodum simplex & specialis Problematis *XLV* infra proponendi, & præsentis solutio suo loco (*Probl. XLV. solut 3. & cor.*) demonstranda, hæc elicitur: Ductis AG & GH ut ante dictum, centro F intervallo = summæ laterum datæ, describe circulum EK. In AG producta, quæ occurrat circulo isti in K, cape GB = GA nec non AP tertiam proportionalem ipsis AB AK. Junge FP & hac diametro describe circulum, qui occurrat alteri EK in aliquo puncto *E* (adeo ut, si ducatur PE, hæc circulum EK contingeret in E). Juncta EF secabit GH in desiderato puncto C, & ductâ denique AC, habetur △:lum quæsitum AFC.

* DUHRE p. 516.

PROBLEMA XVI. * *Fig.* 4.

Super data basi AF *Triangulum* AFC *constituere, cujus vertex C erit ad rectam HC positione datam, basis autem medium existet aritbmeticum inter latera.* Quia (hyp.) æquidifferentes sunt AC AF FC, rursus data est laterum AC CF summa scilicet $=$ 2AF; & si producta concipiatur FC ad E ut sit CE $=$ CA, denuo pariter ac in *præc. Probl. IX.* patet rem eo reduci, ut determinetur in recta HC positione data centrum C circuli, qui per A transiturus datum alium circulum intus contingat. Conficitur itaque ex infra (*Probl. XLV solut.* 3. & *Cor.*) demonstrandis, hæc *constructio:* Centro F intervallo $=$ 2FA describe circutum LEK. Ex A ad HC duc rectam perpendicularem, quæ eidem circulo utrinque occurrat in L & K; ipsi vero HC in G. In GL cape *GO* $=$ GK atque, in GK productâ, ipsis LO, LA, AK, quartam proportionalem *AP*. Invento sic puncto *P*, determinetur ut in *præc. Probl. IX.* punctum *E* indeque porro *C* & ipsum △:lum *AFC.*

Schol. I. Quod si in hoc vel præced. Probl. IX contigerit esse AG $=$ GK, recta per F & K ducta mox secabit HC in quæsito puncto *C* & △:lum in Probl. IX erit Isosceles; sin AG $>$ GK, utrumque problema impossibile est. Cæteroquin duas admittit solutiones (vid. infra *Probl.*

 XLV.

XLV. Schol. 2.); si tamen ut in Probl. IX, fuerit HC parallela ipsi AF, bina, quæ construi possunt, ΔΔ:la positione tantum differunt.

Schol. II. Quando recta HC transit per alterutrum baseos extremum ut F, seu cadit in FC, manifestum est aliam eamque facillimam futuram solutionem. Occurrat nimirum recta FC, quæ jam datur positione, circulo LEK in E; tum juncta AE bisecetur rectâ perpendiculari; secabit hæc ipsam FE in quæsito puncto C.

* PALMQV. §. 32. DUHRE p. 550.

PROBLEMA XXII. * *Fig.* 5.

Datis positione tribus rectis AD AE BF, quartam DF ducere, cujus partes DE EF prioribus interceptæ (adeoque etiam tota DF) *datarum erunt longitudinum.*

ANALYSIS. Concurrant rectæ positione datæ in punctis A B H ut comprehendant Δ:lum ABH datum. Per incognitum punctum E ductam puta EK parallelam ipsi BF. Ob datas rationes (*i*) *AE* : *AK* = AH : HB & *EK* : *BF* = DE : DF, datur ratio ex his composita AE : BF vel (ponendo AL FL parallelas ipsis BF AD, ut sit (*k*) AL = BF) ratio *AE* : *AL* adeoque propter AE AL etiam positione datas, datur (*l*) *EL* directione. (Dicimus nimirum directione dari rectam, quæ cum alia positione data, versus datam partem, angulum determinatum efficit, vel eidem parallela est). Sumto itaque in AE puncto ut lubet E, definiri potest (positio alicujus rectæ EL ideoque punctum L & hinc porro F consequenter) recta EF, cujus partes DE EF

datam

datam inter se rationem habebunt. Ut autem determinetur puncti *E* situs, quo DE EF datam quoque magnitudinem obtineant; notandum porro: ob datas directione rectas EL LF, dari angulum FLF, dari præterea etiam magnitudine FL (=AB); unde datur situs puncti F respectu rectæ LE & puncti L Hinc quia porro datur longitudine FE; dabitur in recta LE puncti *E*, respectu ipsorum F & L, situs, qui saltem non nisi duplex esse potest. Servato itaque alterutro horum punctorum E, datur magnitudine *EL* & (demonstr) directione; Ergo eadem inter datas positione AE AL aptari potest sive dantur FL puncta &c.

His quidem ratiociniis, quorum seriem propositi problematis conditiones nobis proximė suggesserunt, generaliter patet ratio idem construendi. Enimvero pro puncto E, quod in recta AE ad libitum sumi posse diximus, adhibendo ipsum H datum & perpendendo quomodo directio ipsius EL quam commodissime inveniatur &c.; sequens eademque satis concinna elicitur

Synthesis. Sume datis rectis FE FD AB quartam proportionalem *BO*. Per puncta OH duc rectam, quæ secet AL, ducendam ipsi BF parallelam, in *P*, unde fiat ipsi AB parallela PS occursura ipsi BF in *S*. Centro S, intervallo = EF datæ, describe circulum, qui occurrat rectæ PO, productæ si opus fuerit, in aliquo puncto *R* (cfr. seq. *Schol I.*) Porro age ipsis AL PR AD parallelas *RE EL LF*. Per puncta denique FE sic inventa duc rectam

FED; hæc satisfaciet quæstioni. Nam, productis LE AD ad occursum in N, erit *DE* : *EF* :: (NE: FL :: OH : HP ::) *OB* : *BA* id est (*constr.*) in ratione data; & quia porro in ΔΔ:lis EFL RSP est (*f*) ang. FLE = (N = AOP =) SPR, nec non LF = PS & (*k*) LE = PR, ideoque EF = SR; erit (*constr.*) *EF* requisitæ longitudinis; ergo parite *DE*, quippe quæ (*demonstr.*) ad EF justam habet rationem.

Schol. I. Quando circulus centro S, dato intervallo descriptus, rectæ PO bis occurrit, eam in duobus punctis R secando, utrumque horum ad constructionem adhiberi potest, sicque problema dupliciter solvi. Si tamen (alterum punctorum R cadit in P, nimirum si fuerit SR = SP, hoc est) EF = AB, unica datur solutio, ut & quando circulus rectam PO contingit. Ast si fuerit EF minor distantiâ puncti S a recta PO, adeo ut huic plane non occurrat circulus ille; problema impossibile est.

Schol. II. Consideravimus casum maxime compositum, ubi tres rectæ positione datæ omnes inter se convergunt. Facillime autem resolvitur casus simplicior, in quo binæ earum, ut (*Fig. 6.*) AE BF parallelæ sunt. Scilicet sumtâ AD, quæ sit ad AB in data ratione; centro D, intervallo dato DE describe circulum, qui occurrat ipsi AE in uno vel duobus punctis E. Duc denique per D & E rectam DEF. Quod si denique AD AE BF omnes inter se parallelæ fuerint; oportet earum distantias esse in ratione DE : EF iisdemque non minores, problema vero indeterminatum est. Potest nimirum, ubicunque lubet, inter AE BF aptari recta data FE, producenda ad D.

* PALMQV. §. 37. DUHRE p. 551.

PRO-

PROBLEMA XLIII. * *Fig. 7.*

Circulum per data duo puncta A B describere, qui rectam FE positione datam continget.

ANALYSIS. Oppido quidem constat, centrum circuli, quod sit C, fore in recta, datam AB bifariam & ad angulos rectos secante, quæ sit DC. Hæc itaque datur positione, occurrat vero alteri FE in F puncto, quod proinde datur. Esto E punctum contactus FE rectæ & circuli, atque junctæ intelligantur CE CA. Quia in △:lo CEF datur angulus CFE & rectus ad E; datur (*i*) ratio *CF* ad CE vel huic (hyp.) æqualem *CA*. Jungendo data puncta FA, dantur positione recta FA & angulus AFC; quare propter datam quoque (*dem*) rationem CF : CA, dabitur △:li CFA angulus *FAC*, modo pro arbitrio determinetur, utrum idem acutus sumendus sit vel non. (*m*) Ergo, quia datur positione recta FA & in ea punctum A, dabitur *AC* positione, ideoque punctum *C*, in quo alteri positione datæ rectæ DC occurrit.

SYNTHESIS. Rectam AB biseca perpendiculari *DF*, occurrente ipsi FE in *F*, & a puncto ejus quocunque ut D demitte ad FE perpendiculum DI. Per F & punctorum datorum A B alterutrum ut A duc rectam indefinitam, quam secet circulus, centro D per I describendus, in binis punctis N, *n* (quod semper fiet, nisi alterutrum punctorum datorum in ipsam rectam FE cadat; quo rursus in casu, constructio per se manifesta est). Junctis

DN Dn duc per A parallelas AC Ac, quæ occurrant indefinitæ FD in C & c; vel, quod (ob ang. DNn = DnN) perinde (*n*) est: ductâ DN, constitue super recta FN angulos FAC NAc, utrumque = DNF. Centris C & *c* per A vel B descripti circuli satisfacient proposito. Demisso enim ex C (idem vero de altero *c* æque valet) ad FE perpendiculo CE, erit, propter △ FDN ∽ FCA & △ FDI ∽ FCE, DN : CA :: (DF : CF ::) DI : CE, atqui (*Constr.*) DI = DN, ergo *CE = CA = CB*; & circulus centro C per aliquod punctorum ABE descriptus transibit per reliqua, atque rectam FE in E (*o*) continget.

Schol. Dissertatio, cujus in præfatione meminimus, aliam eamque elegantem sistit hujus problematis resolutionem, cui tamen hanc nostram, vel ideo quod isti dissimilis sit, simplicitate autem haud cedere videatur, superaddere visum est.

* PALMQV. §. 41.

PROBLEMA XLIV. * *Fig.* 8.

Circulum per datum punctum A describere, qui rectas duas positione datas EF FG continget. Positis F puncto occursus rectarum, circuli centro C & EG punctis contactus, atque junctis CE CG CF, erit in △△:lis CEF CGF, propter (*hyp.*) CE = CG & (*p*) angulos ad E & G rectos, ang. CFE = CFG (*m*). Cadit itaque C in datam positione rectam FC quæ scilicet bisecat datum angulum EFG, & quæstio jam pendet a solutione ejusdem problematis, ad quod reductum fuit præcedens *Probl. XLIII*, ut

nimi

nimirum determinetur in recta FC positione data centrum C circuli, qui transeat per datum punctum A simulque tangat rectam positione datam, videlicet ipsarum EF FG alerutram ut EF. Hæc igitur (per dem. in probl. cit.) adhiberi potest *constructio*: Produc rectas datas ut conveniant in *F*. (Quodsi autem parallelæ fuerint, mox patet harum distantiam esse diametro circuli desiderati æqualem, &c.) Iisdem contentum angulum EFG illum, intra quem cadit A, biseca recta *FL*, atque alterutri ipsarum ut EF duc utcunque, ut per A, perpendicularem LAK, occurrentem ipsis FE FL in *K* & *L*. Centro L per K describe circulum, qui occurret rectæ FO, per F & A ducendæ, alicubi in *N*. Junctæ NL duc ex A parallelam AC; occurrat hæc ipsi FL in puncto *C*, quo centro descriptus per A circulus continget rectas EF FG. Et si ducatur ex A recta alia Ac efficiens angulum NAc = FAC; reperitur in FL centrum *c* alterius circuli, de quo idem omnino valet.

* GRAVESANDE loc. cit. §. 310. atque Dissert. cit. p. 19.

PROBLEMA XLV. * *Fig.* 9. 10. 11. 12. 4.

Circulum per data duo puncta AB describere, qui alium circulum EKL positione datum continget.

ANALYSIS. Posito hujus centro F, illius C, junctam puta CF, quæ (*q*) occurret circulo EKL in puncto contactus E, & porro (*Fig.* 9. 10.) ductas rectas AE BE, eidem rursus occurrentes in Z, Y, nec non YZ, AB. Constat (per *Eucl. Elem. III.* 11. 12. 18. 16.

18. 16, *Cor.*) quod circulos ABE EKL sese contingentes una eademque, in puncto eorum contactus E, recta tangat. Hæc itaque cum recta AEZ angulos efficiet, quorum unus æqualis est (*Eucl. III.* 32 & *I.* 15.) utrique ipsorum ABE, ZYE; unde ang. *ZYE* = *ABE* & (*r*) recta YZ parallela ipsi AB. Hinc AE : BE : : AZ : BY, quare (*s*) AEq : BEq : : AE × AZ : BE × BY, quæ rectangula, datis (*hyp.*) punctis AB & circulo EKL, datarum sunt (*s*) magnitudinum. Datur itaque ratio AEq : BEq ideoque *AE* : *BE*. Quare (vid. inprimis *Dissert.* antea *cit. Probl.* 7.) punctum E tangit circumferentiam circuli positione datam; præterea vero aliam datam EKL. Datur ergo E & circulus per data jam tria puncta ABE describendus.

Aliter. Præmissa eadem constructione, ducta concipiatur ZR circulum EKL tangens in Z & rectæ AB occurrens in R (occurret autem ob parallelas YZ AB *per dem.*) ut sit (*t*) (ang. *AZR* = (ZYE = *dem.*) *ABE*, △ AZR ∽ ABE, AZ : AR : : AB : AE indeque (*u*) *AB* × *AR* = AE × AZ magnitudine dato (*s*). Datur ergo *AR*, punctum R & hinc Z, *E* &c.

Aliter. ** adhuc, quoties (*Fig.* 11. 12. 4.) recta per A & B ducta occurrit circulo dato in K L. In E tangat circulos EP, occurrens ipsi AB in P. Est itaque (*s*) *AP* × *PB* = (*EPq* =) *LP* × *PK* seu (*u*) PL : PA : : PB : PK unde (*v*) BL : AK : : PL : : PA & porro (*w*) *BL* ± *AK* : *AK* : : *AL* : *AP*. Ergo, ob datas BL AK AL, datur *AP*, punctum *P* indeque denuo *E* &c.

SYNTHE-

SYNTHESIS. *Solutio 1.* (*Fig. 9. 10.*) A punctis A & B duc rectas *AM BT*, datum circulum EKL in M & T tangentes. Seca junctam AB in *V* sic ut *AV*:*VB*::*AM*:*BT* atque in AB producta versus B (si AV > VB seu AM > BT) ipsis *AV*—*VB* & *AV* sume tertiam proportionalem *AX*. Centro X per V describe circulum; hic dato EKL occurret in puncto, quod quaeritur, *E*. Jam centrum C circuli desiderati pluribus modis inveniri potest, ut sequenti. Per A & E duc rectam, quae circulo EKL iterum occurret in Z; junge FZ, cui parallela fiat AC, occurrens rectae per F & E ducendae in *C*. Circulus centro C per aliquod punctorum A B E descriptus, is est, quem describere oportebat. Nam (*constr. f*) ang. *CAE* = (FZE = (*x*) FEZ =) *CEA*, unde (*y*) *CA* = *CE*. Porro (per constr. & Dissert. cit. p. 14.) AE: BE :: AM: BT seu (*f*) AEq: BEq :: (AMq: BTq :: *s*) AE × AZ: BE × BY; hinc (*z a*) *AE*: *BE*:: AZ: BY :: (*v*) *EZ*: *EY*, vel *BE*: *EY*:: (*z*) AE: EZ :: (ob △△ CAE FZE aequiangula *per dem.*) *CE*: *EF*, quare (*l*) △ CBE ∽ FYE adeoque, propter FE = FY, erit *CB* = *CE* = (dem.) *CA*. Ergo circulus centro C per unum punctorum ABE descriptus transibit per reliqua & (*o*) circulum EKL in E continget. Commodior vero est sequens

Solutio 2. Junge data puncta AB nec non alterutrum horum ut A atque dati circuli centrum F rectâ, peripheriam in SQ secante. In AB, producta si opus fuerit, cape ipsis AB AS AQ quartam proportionalem *AR*. Ab invento sic puncto R ducatur recta RZ, circulum datum tangens in Z. Juncta AZ, ubi circulo iterum occurrit, determinabit punctum *E* contactus circulorum; quo invento, reperitur centrum *C* ut in *Solut. I.* Etenim quia (constr.) AB : AS :: AQ : AR, erit (*u*) *AB* × *AR* = (AS × AQ = (*s*) *AE* × *AZ*; unde vicissim (*u*) AB:AE :: AZ : AR & (*l*) in △△:lis ABE AZR ang *ABE* = (AZR = (*t*) *EYZ*; Ergo △ ABE ∽ ZYE seu AE : BE :: EZ : EY; unde cætera sequuntur ut in demonstratione solutionis præcedentis ostensum. Intelligitur autem in utraque constructione determinari posse centrum C etiam per concursum rectæ FE & alius perpendiculariter bisecantis quamcunque ipsarum AB AE EB.

Solutio 3 Specialis. (*Fig.* 11. 12. 4.) Quando recta per A, B, si & quoad opus fuerit, producta, dato circulo occurrit in *K*, *L*; constructio etiam hunc fere in modum commode perficitur. Ducta recta HG perpendiculariter bisecante ipsam AB in G; in AB, producta si opus sit, cape *GO* = GK. Tum ipsis LO LA AK sume quartam proportionalem *AP* (sic constituendam, ut puncta K & P ad eandem vel oppositam partem puncti A cadant, prout A & O ad eandem vel oppositam partem ipsius L sita fuerint) Ab invento sic puncto *P* ducatur recta PE circulum datum tangens in *E*, quod erit punctum contactus circulorum. Ductâ jam recta FE, coëant FE & HG in *C*. Centro *C* per A vel B vel E describe circulum; hic proposito satisfaciet. Etenim (*constr.*) *AK* : AP :: (LO : LA :: LO ∓ AK.

AK : LA = AP i. e. ob GO = GK & AG = GB ideoque OB = AK) *BL : PL*, & porro (*w*) PK : AP :: BP : PL; seu (*u*) *AP* × *PB* = (PK × PL (*s*) *PEq.* Ergo circulum, qui per puncta ABE semper (β) describi potest, tangit (γ) in E recta PE, quæ vero (*constr.*) etiam tangit circulum EKL in eodem puncto E. Ergo circuli isti sese in E tangunt & illius centrum oportet esse in concursu rectarum GH & FE (*Eucl.* III. 1. Cor. & convers. 11. 12.)

Schol. I. Qnando puncta A & B æqualiter distant a centro F circuli dati, manifestum est rectam HC, quæ ipsam AB perpendiculariter bisecat, occursuram circulo illi in quæsito puncto contactus E, atque sic constructionem in hoc quidem casu facillimam fore.

Cor. Ut *inveniatur in recta positione data HC centrum C circuli, qui per datum punctum A transeat & datum circulum EKL contingat*; ex A ad HC demissa perpendiculari AG, quæ producatur ad *B*, ut fiat *GB* = GA, patet etiam B fore in circumferentia ejusdem circuli, ideoque erit C centrum circuli per data sic puncta AB transeuntis & datum circulum EKL tangentis, modis jam expositis determinandum. De illo casu (*Fig.* 4.) ubi A intra circulum datum collocatur, confr. *Constr. Probl. XVI*; & speciatim, quando recta AF, datum punctum A & centrum F circuli dati jungens, parallela est ipsi HC seu perpendicularis ipsi AG, constructio hæc in illam abit, quæ supra allata est *Probl. IX.* Est enim tunc (δ) LA = AK = (*dem. Solut.* 3.) OB ideoque LO = AB; ergo quarta proportionalis AP ipsis LO LA AK, jam est tertia ipsis AB AK.

Schol. II. Cum in *Solut. I.* circulus per V describendus dato occurrere possit in duobus punctis E, e, quorum utrumque ad constructionem adhibere licet, vel in *Solut.* 2. & 3. a puncto R (vel P) ad circulum datum duæ duci queant tangentes RZ Rz (PE Pe); intelligitur duos circu-

los

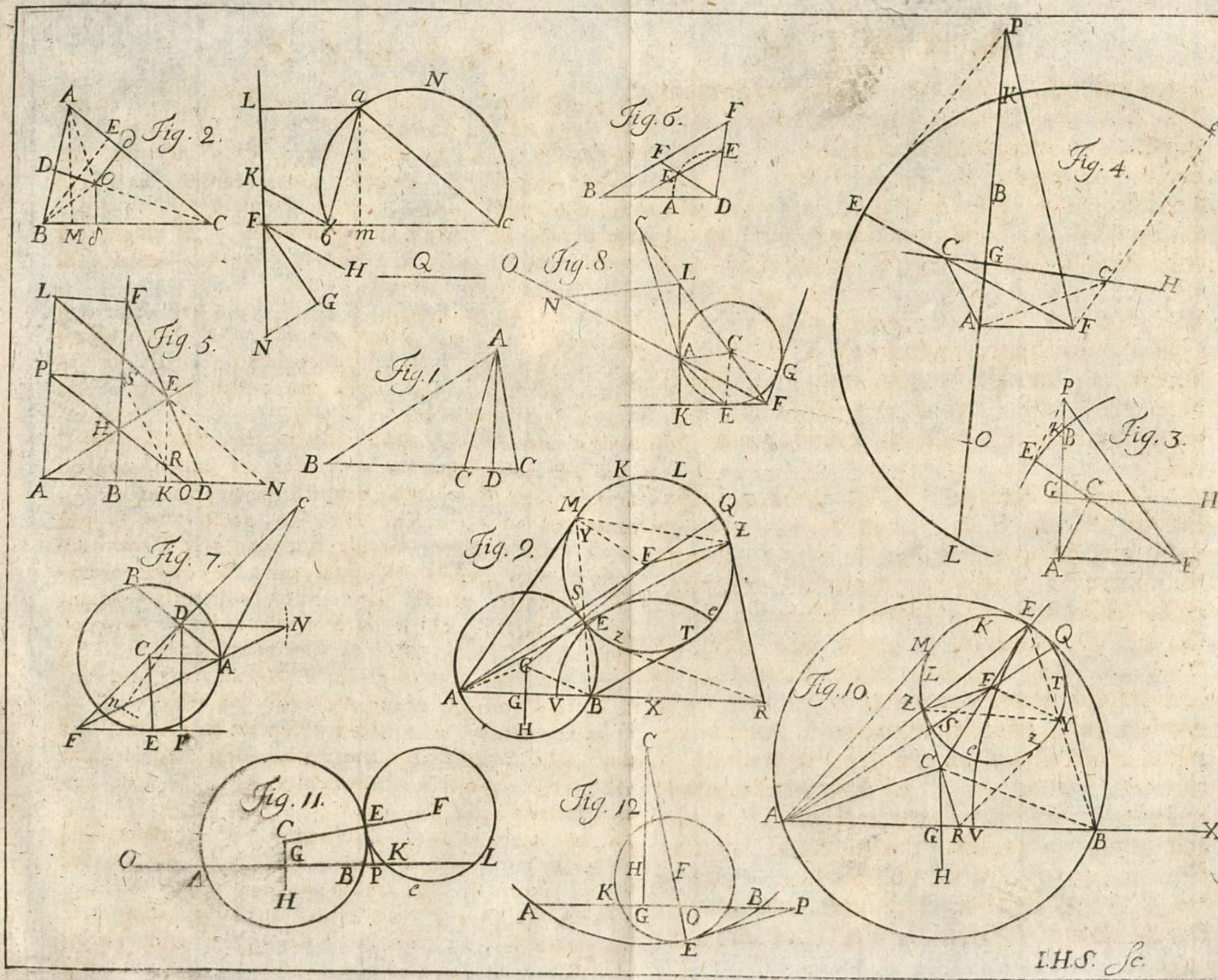
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
I.H.S. Sc.

los problemati satisfacere, quoties recta AB datum circulum non tangit, nec alterutrum punctorum A B in ipsam ejus circumferentiam incidit. Et quidem si (*Fig.* 9. 10.) huic non occurrit, idem hic alterum illorum extra continget, alterum intus. Si puncta A B extra circulum EKL cadunt & recta AB (*Fig.* 11.) eum producta secat, uterque illorum eundem extra continget ad contrarias partes ipsius AB; si non producta (*Fig.* 12.), hic utrumque intus tanget. Si denique (*Fig.* 4.) A & B intra circulum datum posita sunt, uterque hunc intus continget. Cæterum monendum duximus: si Solutionem I ad ultimum hunc casum, quamvis parum commode, adplicare velis; pro tangentibus AM BT, adhibendas esse rectas, quæ ex A & B ducantur perpendiculares diametris circuli dati per hæc puncta transeuntibus, & ad peripheriam usque pertingant (*Eucl.* III. 35. vel VI. 13. 17.

* PALMQV. §. 42. GRAVES. M. U. §. 308. Dissert. cit. p. 20.

** Dissert. cit. p. 22.

---

a Eucl. Elem. Lib. IV. prop. 4. *b* I. 42. *c* II. 14. *d* III. 33. *e* VI. 17. *f* I. 29. *g* I. 26. *h* I. 20. *i* VI. 4. *k* I. 34. *l* VI. 6. *m* VI. 7. *n* I. 28. *o* III. 16. Cor. *p*. III. 18. *q* III. 12. 11. *r* I. 27. *s* VI. 22. *s*. III. 36. vel 35. *t* III. 32. *u* VI. 16. *v* V. 12 vel 19. *w* V. 18. vel 17. *x*. I. 5. *y* I. 6. *z* V. 16. *α* VI. 1. *β* IV. 5. *γ* III. 37. *δ* III. 3.

EMENDANDA.

In *Fig.* 9. rectarum CEF & AZ intersectio in ipsum circulorum contactum E cadere debet & per eundem quoque circulus Ve transire. Pag. 4 lin. 3. post sin $\overline{C+B}$ pro ; pone: Pag. 8. lin. 7. lege PROBLEMA. Pag. 9. lin. 18. lege Circulum. Pag. 10. lin. 20. *FK* leg. *EK*. Pag. 11. lin. 13. FL leg. EL. Pag. 16. lin. 19. (ang. deleatur (

****
****